

Übersicht Aussagenlogik

Lutz Herrmann
Georgius-Agricola-Gymnasium Glauchau

6. Oktober 2020

Die Aussagenlogik beschäftigt sich mit wahren und falschen Aussagen und ihren Verknüpfungen. Sie ist eine Grundlage bei der Erstellung von Schaltungen in der Digitaltechnik.

Definition 1

Aussagen sind sprachliche Gebilde, bei denen man entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch sind.

Grundlegende Aussagefunktionen

Negation (nicht) Die Negation einer Aussage X ist genau dann wahr, wenn X „nicht“ wahr ist. Für „nicht X “ kann man auch \bar{X} schreiben.

Wahrheitstabelle:

X	\bar{X}
1	0
0	1

Konjunktion (und) Die Konjunktion der Aussagen X und Y ist genau dann wahr, wenn X „und“ Y wahr sind. Für „ X und Y “ kann man auch $X \wedge Y$ schreiben.

Wahrheitstabelle:

X	Y	$X \wedge Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunktion (oder) Die Disjunktion der Aussagen X und Y ist genau dann wahr, wenn X „oder“ Y oder beide wahr sind. Für „ X oder Y “ kann man auch $X \vee Y$ schreiben.

Wahrheitstabelle:

X	Y	$X \vee Y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Weitere Aussagefunktionen

Implikation (wenn-dann) Als Implikaton werden Aussagen der Form „Wenn X , dann Y “ oder „Aus X folgt Y “ bezeichnet. X ist dabei die Voraussetzung, Y ist die Behauptung. Abgekürzt kann man für die Implikation schreiben: $X \rightarrow Y$. Aus einer wahren Voraussetzung kann nur eine wahre Voraussetzung folgen, deshalb steht in der ersten Zeile der Wahrheitstabelle eine 1 und in der zweiten Zeile eine 0. Aus einer falschen Voraussetzung kann sowohl eine wahre als auch eine falsche Behauptung folgen. Deshalb steht in der dritten und vierten Zeile der Wahrheitstabelle eine 1.

Wahrheitstabelle:

X	Y	$X \rightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Äquivalenz (genau dann, wenn) Als Äquivalenz werden Aussagen der Form „ X genau dann, wenn Y “ genannt. Die Äquivalenz ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr oder beide Teilaussagen falsch sind.

Wahrheitstabelle:

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Übersicht Aussagenlogik

In der Digitaltechnik werden häufig noch die folgenden logischen Funktionen verwendet:

Antivalenz (entweder-oder, exklusiv oder) Genau wie bei der Disjunktion (oder) ist die Antivalenz wahr, wenn entweder X oder Y wahr sind, sie ist allerdings falsch, wenn X und Y beide wahr sind. Die Antivalenz ist die Negation der Äquivalenz. Als Symbol schreibt man $X \oplus Y$ oder $X \leftrightarrow Y$.

Wahrheitstabelle:

X	Y	$X \oplus Y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

NICHT UND Diese Funktion ist die Negation der Konjunktion. $(\overline{X \wedge Y})$

Wahrheitstabelle:

X	Y	$\overline{X \wedge Y}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

NICHT ODER Diese Funktion ist die Negation der Disjunktion. $(\overline{X \vee Y})$

Wahrheitstabelle:

X	Y	$\overline{X \vee Y}$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tautologien

Eine **Tautologie** (Identität) ist eine Aussagenverbindung, die unabhängig von den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen immer Wahr ist.

Einge Tautologien:

- $\overline{\overline{X}} \leftrightarrow X$
- $(X \vee X) \leftrightarrow X$
- $(X \wedge X) \leftrightarrow X$
- $\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})$
- $\overline{X \vee Y} \leftrightarrow (\overline{X} \wedge \overline{Y})$

Die letzten beiden Tautologien nennt man die **de Morganschen Regeln**.

Zwei Schlussregeln

Einsetzungsregel Setzt man in einer Tautologie für eine Einzelaussage an jeder Stelle, an der sie in der Tautologie vorkommt, eine beliebige andere Einzelaussage oder Aussageverbindung ein, so erhält man wieder eine Tautologie.

Abtrennungsregel Wenn eine wahre Aussage die Form einer Implikation hat und wenn außerdem die Voraussetzung von dieser Implikation den Wahrheitswert 1 hat, dann ist die Behauptung wahr.